MATEMATICAS 4

GUIA DE EJERCICIOS PARA EL PRIMER (y/o SEGUNDO) PARCIAL DE MATEMATICAS 4 con SOLUCIONES

Temas presentes en la guía.

1.- Sucesiones de números. Series de números.
2.- Criterios de convergencia.
3.- Convergencia absoluta -Convergencia condicional - Series alternantes
4.- Series de potencias - Operaciones con series de potencias.
5.- Series de Taylor y Mac Laurin. Estimación de errores.
6.- Ecuaciones diferenciales ordinarias. Introducción - Ejemplos.
7.- Campos Direccionales - Curvas Integrales - Existencia y unicidad de solución.
8.- Ecuación lineal de orden 1. Ecuación de Bernouilli.
9.- Ecuaciones en variables separables y ecuaciones homogóneas.
10.- Algunos casos de reducción de orden.

CON MAS DE <u>350</u> EJERCICIOS.

Actualizada: **AGOSTO 2011**

Elaborada por: Miguel Guzman

INIDICE GENERAL.

PRIMERA PARTE “SERIE Y SUCESIONES”

SUCESIONES INFINITAS

1.- Describa los primero seis términos de las sucesiones que se presenta a continuación y determine su límite en caso posible.

a.- $a_n = \frac{n}{3n-1}$ b.- $a_n = \frac{3n^2+2}{2n-1}$ c.- $a_n = (-1)\left(\frac{n}{n+2}\right)$ d.- $a_n = \frac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$

e.- $a_n = e^{-n}\sin(n)$ f.- $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ g.- $a_n = \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2n}}$ h.- $a_n = (2n)^{\frac{1}{n}}$

2.- Describa una formula explicita para las sucesiones que se dan a continuación.

a.- $\frac{1}{2^2}; \frac{2}{2^3}; \frac{3}{2^4}; \frac{4}{2^5}$ b.- $1, \frac{1}{1-\frac{1}{2}}; \frac{1}{1-\frac{2}{3}}; \frac{1}{1-\frac{3}{4}}$ c.- $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}; \frac{2}{3-\frac{1}{3}}; \frac{3}{4-\frac{1}{4}}; \frac{4}{5-\frac{1}{5}}$ d.- $2; 1; \frac{2^3}{3^2}; \frac{2^4}{4^2}; \frac{2^5}{5^2}$

3.- Use la definición de límite para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 1$$

4.- Considere la sucesión establecida por la relación

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \;\; ; \;\; a_1 = 1$$

Estudiar si es acotado o no.

5.- Estudiar si la sucesión es creciente

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$$

6.- Establezca para que valores de x la sucesión

$$a_n = x^n$$

Es monótona.

7.- Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$$

Es acotada pero no es monótona.

8.- Compruebe que

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Es acotada.

9.- Determine el límite de la sucesión

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$$

10.- Determine la convergencia/divergencia de las sucesiones siguientes.

a.- $a_1 = \sqrt{2}\ ;\ \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

b.- $a_1 = 1\ \ ;\ \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

$c.-\ a_1 = 1\ \ ;\ \ a_{n+1} = \dfrac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}$

$d.-\ \ a_1 = 2\ \ ;\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n^2 + 3)$

$e.-\ \left\{\dfrac{\cos(n^2 + 1)}{n}\right\}$

$f.-\ \left\{\left(\dfrac{n + 1}{2n + 1}\right)^2\right\}$

$g.-\left\{\sqrt[n]{n}\right\}\qquad sug\!:\ 1 \le \sqrt[n]{n} \le \dfrac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n}$

$h.-\left\{\sqrt[n]{n + 3} - \sqrt[n]{n}\right\}$

11.- Se define $\{a\}, \{b\}$ como

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ \ ;\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ \ \ ;\ \ \ a_1 = 2\ ;\ b_1 = 1$$

y suponga $\ a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$

Pruebe que convergen (demuestre p or inducción la suposición) y tienen el mismo límite.

12.- Para los siguientes ejercicios determine si la sucesión converge o diverge. Si la sucesión converge, calcule límite.

a.- $\left\{\frac{e^n}{n}\right\}$ b.- $\left\{\frac{\log_b n}{n}\right\}$ $con\ b > 1$ c.- $\left\{\frac{\sinh(n)}{\sin(n)}\right\}$ d.- $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}$

13.- Determine si la sucesión es creciente, decreciente o no es monótona.

a.- $\left\{\frac{2n-1}{4n-1}\right\}$ b.- $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$ c.- $\left\{\frac{(2n)!}{5^n}\right\}$ d.- $\{n^2+(-1)^n n\}$ e.- $\left\{\frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right\}$

14.- Demuestre que las sucesiones

$$\left\{\frac{n^2}{n+3}\right\} \quad y \quad \left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$$

Son divergentes, pero que la sucesión

$$\left\{\frac{n^2}{n+3}-\frac{n^2}{n+4}\right\}$$

Es convergente.

15.- Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, donde $\lim_{n\to\infty} = L$, entonces la sucesión $\{a_n^2\}$ también es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = L^2$

16.- Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, donde $a_n > 0$ para toda n y $a_{n+1} < ka_n$ con $0 < k \leq 1$.

SERIES INFINITAS

17.- Determine si las siguientes series convergen, o divergen, en caso de convergencia determine la suma de la serie.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-(k+2)}$ b.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$ c.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^k$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k}$ e.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k}$ f.- $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{2}{k-5}$

18.- Muestre que la serie diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

19.- Muestre que se cumple la igualdad

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$$

20.- Determine la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^{k+1}-1)(2^k-1)}$$

SERIES A TERMINOS POSITIVO, CRITERIO DE LA INTEGRAL.

21.- Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge. Demuestre las tres hipótesis del teorema.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$ b.- $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{3}{(k+2)^2}$ c.- $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1000}{k(\ln(k))^2}$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\sqrt{k+2}}$ e.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(4+3k)^{\frac{7}{6}}}$

f.- $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-3k^2}$

22.- Determine si la serie converge o diverge utilizando cualquiera de los criterios hasta el momento visto.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ b.- $\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ c.- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right)$

SERIES A TERMINOS POSITIVO, OTROS CRITERIOS..

23.- Determine si la serie converge o diverge. Utilice alguno de los criterios hasta ahora estudiados.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$ d.- $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ e.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$ f.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{k!}$

g.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$ h.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ i.- $\frac{2}{1.3.4}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{4}{3.5.6}+\frac{5}{4.6.7}+\cdots$ j.- $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{8}+\cdots$

k.- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

24.- Sea $a_n > 0$ y suponga que $\sum a_n$, converge. Demuestre que $\sum a_n^2$ converge.

25.- Compruebe la convergencia o divergencia usando el criterio de la raíz.

a.- $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

26.- Compruebe la convergencia o divergencia.

a.- $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

SERIES ALTERNANTES, CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL.

27.- Determine la convergencia absoluta o condicional de las series.

a.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{e^n}$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ d.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n^{1.1}}$

e.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10n^{1.1}+1}$ f.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$ g.- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ h.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}$

i.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2}$ j.- $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ k.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$ l.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$

m.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ n.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

MÁS EJERCICIOS DE SERIES.

28.- Pruebe la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$$

29.- Estudie la convergencia o la divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n)|}{n^2}$$

30.- Para las siguientes series, calcular

a.- La suma de los cuatro primeros términos.

b.- El error cometido al aproximar la serie por la suma de estos 4 primeros términos.

C.-Cuantos términos se tienen que sumar si queremos un error menor a 0,01.

$$a.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \qquad\qquad b.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$$

31.- Calcular el valor de la serie dado con un error menor que 0,01.

$$a.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n} \qquad\qquad b.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$$

32.- Determine si la serie converge. (alternante)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\cos(3n)}{n^2+n}$$

SERIES DE POTENCIAS.

33.- Determine el radio de convergencia para las siguientes series.

a.- $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ b.- $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{8}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$

c.- $x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots$ d.- $1+x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{\sqrt{5}}+\cdots$

e.- $1+2x+2^2x^2+2^3x^3+2^4x^4+\cdots$ f.- $1+(x+2)+\frac{(x+2)^2}{2!}+\frac{(x+2)^3}{3!}+\cdots$

g.- $\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{3^2}+\frac{(x-2)^4}{4^2}+\cdots$ h.- $(x+3)-2(x+3)^2+3(x+3)^3-4(x+3)^4+\cdots$

34.- Demuestre que la suma S(x) de

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$$

¿Cuál es el conjunto de convergencia?

OPERACIONES SOBRE SERIE DE POTENCIA.

35.- Especifique el radio de convergencia y el desarrollo de serie para las siguientes funciones.

a.- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ b.- $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ c.- $f(x) = \frac{1}{3+2x}$ d.- $f(x) = \frac{x^3}{2-x^3}$ e.- $f(x) = \int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

36.- Determine la suma de cada una de las siguientes series.

a.- $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots$

b.- $\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots$

c.- $2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \cdots$

37.- Determine la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

SERIE DE TAYLOR Y MacLAURIN.

38.- Determine los primeros 5 términos de las siguientes funciones, en el desarrollo en serie.

a.- $f(x) = \tanh(x)$ b.- $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ c.- $f(x) = \cos(x)\,(\ln(1+x))$

d.- $f(x) = \sin(x)\sqrt{1+x}$ e.- $f(x) = \frac{\left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$ f.- $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$

g.- $f(x) = x(\sin(2x) + \sin(3x))$ h.- $f(x) = (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

39.- Determine la serie de Taylor hasta el tercer término centrada en "a"

a.- $f(x) = \sin(x) \quad a = \frac{\pi}{6}$ b.- $f(x) = \tan(x) \quad a = \frac{\pi}{4}$

c.- $f(x) = 1 + x^2 + x^3 \quad a = 1$ d.- $f(x) = 2 - x + 3x^2 - x^3 \quad a = -1$

40.- Determine la serie de MacLaurin para las funciones dadas.

a.- $f(x) = e^{x+x^2}$ b.- $f(x) = e^{\sin(x)}$ c.- $f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{t^2} dt$ d.- $f(x) = e.e^{\cos(x)-1}$

e.- $f(x) = \ln(cos^2(x))$

REVISION.

41.- Determine si la sucesión y serie converge o diverge, para el caso de las series alternantes determine si converge condicionalmente o absolutamente.

a.- $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ b.- $a_n = \frac{n!}{3^n}$ c.- $a_n = \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n}}$ d.- $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ e.- $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

f.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ g.- $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(k\pi)$ h.- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k} + \frac{4}{3^k}\right)$ i.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)^k$

j.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{1+n^3}$ k.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ l.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}$ m.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 3^n}{(n+1)!}$ n.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ln(n)}$

o.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$ p.- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$

42.- Determine el radio de convergencia.

a.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^3+1}$ b.- $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{x^n}{2n+3}$ c.- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{n+1}$ d.- $\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

e.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n+1}$ f.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{3^n}$

SEGUNDA PARTE "ECUACIONES DIFERENCIALES, Parte 1".

ECUACIONES *DIFERENCIALES GENERAL. INTRODUCCION.*

43.- En las siguientes ecuaciones diferenciales, determine orden del diferencial si es una ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencia parcial.

a.- $5.\frac{d^2x}{dt^2}+2.\frac{dx}{dt}+9x=2\cos(3t)$ (vibraciones mecánicas…)

b.- $8.\frac{d^4y}{dx^4}=x(1-x)$ (deflexión en vigas)

c.- $\frac{dy}{dx}=\frac{y(2-3x)}{x(1+3y)}$ (competencia entre dos especies, ecología)

d.- $\frac{dx}{dt}=k(4-x)(1-x), con\ k\ cste$ (velocidad de las reacciones químicas)

e.- $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$ (aerodinámica, análisis de esfuerzos)

44.- Determine si la función dada es solución de la ecuación diferencial indicada.

a.- $y=\sin(x)+x^2,$ $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2+2$

b.- $y=e^{2x}-3e^{-x},$ $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0$

c.- $x=2e^{3t}-e^{2t},$ $\frac{d^2x}{dt^2}-x.\frac{dx}{dt}+3x=-2e^{2t}$

d.- $x=\cos(2t)$ $\frac{dx}{dt}+tx=\sin(2t)$

e.- $x=\cos(t)-2\sin(t)\,,$ $x''+x=0$

f.- $y=3\sin(2x)+e^{-x}$ $y''+4y=5e^{-x}$

45.- Determine si la relación dada es solución implícita de la ecuación diferencial.

a.- $x^2+y^2=4,$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ b.- $y-\ln y=x^2+1$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{y-1}$

c.- $e^{xy}+y=x-1$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}$

46.- Determine para que valores de m la función $\emptyset(x) = x^m$ es solución dada.

a.- $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x.\frac{dy}{dx} - y = 0$

b.- $x^2.\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

47.- Determine la familia de curvas ortogonales a las curvas dadas a continuación, bosqueje ambas en caso posible.

a.- $xy = c$ b.- $y = cx^2$ c.- $r = c(1 + \cos(\theta))$ [1] d.- $y = c\, e^x$

e.- $x^2 + 2y^2 = k^2$ f.- $y^2 = k\, x^3$ g.- $y = \frac{k}{x}$ h.- $y = \frac{x}{1+kx}$

48.- Halle usando coordenadas polares las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $r = \frac{c}{1-\cos(\theta)}$ con $c > 0$.[4]

49.- Sea un circuito eléctrico formado por una resistencia, condensador. Sea $R = 12\Omega$ y $C = 4\ F$. Si una batería da un voltaje de 60V y el interruptor se cierra en t=0 de modo que $Q(0) = Q_0$. *Determine*: a.- $Q(t)$ b.- Carga Q en 1 seg. c.- Valor límite cuando $t \to \infty$. [2]

ECUACIONES LINEALES.

50.- Determine la solución general de la ecuación.

a.- $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ b.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x + 1$

c.- $\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-4x} - 4y$ d.- $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^{-3}$

e.- $\frac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta) = \sec(\theta)$ f.- $(t + y + 1)dt - dy = 0$

g.- $y\frac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$ h.- $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = x$

i.- $x\frac{dy}{dx} + 3y + 2x^2 = x^3 + 4x$ j.- $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 1 - 4xy$

1 Las coordenadas polares establece que una vez determinada la ecuación diferencial de las curvas. La pendiente de la familia ortogonal a estas será $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{F(r,\theta)}$, donde $F(r,\theta)$ es la EDO.

2 No crea que este ejercicio esta fuera de lugar, vera al final de Física 3 en los circuitos RC RL y RLC(Física 4) que se requiere de una ecuación diferencial lineal para resolver el problema planteado. Recuerde que $i = \frac{dq}{dt}$ en presencia de un condensador.

51.- Resuelva el problema de valor inicial.

a.- $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x \qquad y(1) = e - 1$

b.- $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0 \qquad y(0) = \frac{4}{3}$

c.- $\sin(x)\frac{dy}{dx} + ycos(x) = x\sin(x) \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

d.- $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} + 2 = 3x \qquad y(1) = 1$

e.- $x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x \qquad y(2) = 0$

f.- $\cos(x)\frac{dy}{dx} + y\sin(x) = 2x\cos^2(x) \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{15\sqrt{2}\pi^2}{32}$

ECUACIONES DE BERNOULLI.

52.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a.- $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$ b.- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2$ c.- $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - x^2y^2$

d.- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{\frac{1}{2}}$ e.- $\frac{dy}{dx} + y^3x + \frac{y}{x} = 0$ f.- $\frac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$

g.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ h.- $\frac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$

VARIABLE SEPARABLES.

53.- Resuelva la ecuación dada.

a.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2}$ b.- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^3}$

c.- $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$ d.- $\frac{dy}{dx} = y(2 + \sin(x))$

e.- $\frac{dy}{dx} = 3x^2(1 + y^2)$ f.- $\frac{dy}{dx} + y^2 = y$ g.- $x.\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$

h.- $y\sin(x)\,e^{\cos(x)}dx + y^{-1}dy = 0$ i.- $(x + xy^2)dx + e^{x^2}y\,dy = 0$

54.- Resolver el problema con valor inicial.

a.- $x^2dx + 2y\,dy = 0 \quad y(0) = 2$

b.- $\frac{dy}{dx} = 8x^3e^{-2y} \quad y(1) = 0$

c.- $\frac{dy}{dx} = y\sin(x) \quad y(\pi) = -3$

d.- $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2y+1} \quad y(0) = -1$

e.- $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y+1}\cos(x) \quad y(\pi) = 0$

f.- $y' = x^3(1-y) \quad y(0) = 3$

g.- $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\tan(x) \quad y(0) = \sqrt{3}$

h.- $\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y \quad y(0) = \pi/4$

i.- $\frac{dy}{dx} = x^2\,(1+y) \quad y(0) = 3$

j.- $\sqrt{y}\,dx + (1+x)dy = 0 \quad y(0) = 1$

ECUACIONES HOMOGENEAS.

55.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales. Demuestre la homogeneidad de la ecuación y aplica los procedimientos a seguir.

a.- $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$

b.- $(xy+y^2)dx - x^2dy = 0$

c.- $(y^2-xy)dx + x^2dy = 0$

d.- $(3x^2-y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$

e.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$

f.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sec\left(\frac{y}{x}\right)+y}{x}$

g.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{3xy}$

h.- $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y(\ln(y)-\ln(x)+1)}{x}\right)$

COCIENTES LINEALES.

56.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a- $(-3x+y-1)dx + (x+y+3)dy = 0$

b.- $(x+y-1)dx + (y-x-5)dy = 0$

c.- $(2x+y+4)dx + (x-2y-2)dy = 0$

d.- $(2x+y)dx + (4x+y-3)dy = 0$

REDUCCION DE ORDEN

57.- Resolver las siguientes ecuaciones.

i.- $yy'' + (y')^2 = 0$

ii.- $xy'' = y' + (y')^3$

iii.- $y'' - k^2 y = 0$

iv.- $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$

v.- $2yy'' = 1 + (y')^2$

vi.- $yy'' - (y')^2 = 0$

vii.- $xy'' + y' = 4x$

58.- Hallar la solución particular en cada caso.

i.- $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$ $\quad y = 1 \quad e \quad y' = 0 \;\; para\; x = 0$

ii.- $yy'' = y^2 y' + (y')^2$ $\quad y = -\frac{1}{2} \quad e \quad y' = 1 \;\; para\; x = 0$

iii.- $y'' = y' e^y$ $\quad y = 0 \quad e \quad y' = 2 \;\; para\; x = 0$

59.- Resuelva por medio de reducción de orden.

i.- $xy'' + y' = 8x \qquad x > 0$

ii.- $y'' = 4x\sqrt{y'}$

iii.- $y'' = 1 + (y')^2$

iv.- $y'y'' = 1$

v.- $y'' + y(y')^3 = 0$

vi.- $y'' + yy' = 0$

vii.- $y'' - \left(\frac{2}{x}\right)y' = x^4 - 3x^3 + x^2 \quad x > 0$

viii.- $y'' = y' e^y$

ix.- $(1 + y^2)y'' = y' + (y')^3$

REVISION.

60.- Resolver las ecuaciones diferenciales.

a.- $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{y-1}$

b.- $x^3 y^2 dx + x^4 y^{-6} dy = 0$

c.- $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \sin(2x)$

d.- $\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2x - y + 3}$

e.- $\frac{dy}{dx} + 2y = y^2$

f.- $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$

g.- $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^{-1} y^{-1} \qquad y(1) = 3$

PREGUNTA DE PARCIALES.

61.- Considere la sucesión definida por

$$a_n = \frac{2n^4 - 1}{1 + 3n^4} a_{n-1}$$

Si $n \geq 1 \ \ y \ a_0 = 1$. Demuestre que la sucesión es convergente y calcule su límite.

62.- De las siguientes series determine si converge o diverge, en caso de alternantes (ya sabe que responder)

a.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n l n^4(n)}$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1-n}{n}}$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n(n)}{n^n(2n)!}$ d.- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\arctan(n)}$

63.- Determine el conjunto y radio de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n5^n} (x+1)^n$$

64.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a.- $\frac{dy}{dx} = y - xe^{-2x} y^3$ b.- $y' = \frac{x+2y-1}{2x+y-5}$ c.- $y'(1 + (y')^2) = y''$

65.- Demuestre que si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente entonces, es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} - a_n$$

66.- Encuentre el desarrollo en serie de MacLaurin de la función

$$f(t) = \int_0^t (e^{-2x} - 1) x dx$$

67.- Encuentre el desarrollo en serie de MacLaurin de

$$f(x) = x^2 \ln(1 + 2x^2)$$

68.- Determine en cada caso si la serie dada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

a.- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}}$ b.- $-1 - 5 + \frac{10}{6} - \frac{17}{13} + \frac{26}{22} - \cdots$

69.- Determine el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$$

70.- Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_o = 7 \qquad a_n = \frac{3(n+1)}{n^3+1} a_{n-1}$$

Si $n \geq 1$. Decida si la sucesión es convergente. Si lo es calcule su límite.

71.- Resolver

$$2xyy' \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) = 2y^2 \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + xy \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

72.- Halle la solución explicita del problema, indicado el intervalo de definición de la misma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y(xy^2 - 3) = 0 \\ \qquad y\left(\dfrac{19}{6}\right) = 1 \end{cases}$$

73.- Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas S definidas por

$$x^2 + y^2 = cx$$

Dibuje ambas familias.

74.- Resuelva las ecuaciones diferenciales.

a.- $y'y = -\frac{y^2}{x} + \frac{(x-1)}{2}$ con la condición $y(1) = 1$

b.- $y' - 4y = 2e^x\sqrt{y}$ con la condición $y(0) = 2$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS.

Pregunta 2

a.- $a_m = \frac{m}{2^{m+1}}$ b.- $a_n = \frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}$ c.- $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+2n}$

d.- $\frac{2^n}{n^2}$

Pregunta 3

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Lo cual es lo mismo a $\frac{1}{\epsilon} < n + 1$

Para cualquier épsilon positiva se elige $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ luego $n \geq N =>$ $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$

Para $n > 0$ se tiene que

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} . \frac{n}{n^2+1} < \epsilon$$

Es lo mismo que $\left|\frac{n^2+1}{n}\right| = n + \frac{1}{n} > \frac{1}{\epsilon}$, es suficiente con tomar $n > \frac{1}{\epsilon}$. Así que para $\epsilon > 0$ se elige $N > \frac{1}{\epsilon}$ luego $n \geq N =>$ $\left|\frac{n}{n^2+1}\right| < \epsilon$

Pregunta 4

Datos tenemos que $a_1 = 1$, observamos los términos siguientes

$$a_2 = \frac{1}{2} \; ; \; a_3 = \frac{1}{4} \; ; \; a_4 = \frac{1}{8} \ldots$$

Podemos pensar que la cota para la sucesión seria 1. Probemos por inducción

$$a_n < 1 \; ; \; a_{n+1} = \frac{a_n}{2} < 1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{1}{2} < 1 \;\; ; \;\; a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces la sucesión si está acotada.

Pregunta 5

Observamos los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 0; \; a_2 = \frac{2}{2}; \; a_3 = 0; \; a_4 = \frac{2}{4} \; ; \; a_5 = 0; \; a_6 = \frac{2}{6}; \ldots$$

Observamos que para números impares la sucesión es 0 y para números pares se puede escribir como $a_{2n} = \frac{1}{n}$. Entonces la sucesión no es creciente ni decreciente.

Pregunta 6

Observamos para números negativos ($x < 0$), la sucesión cambia de signo para n par o impar. Entonces no hay monotonía.

Para $x = 0$ la sucesión es constante a 0.

Para $x > 0$, estudiamos la monotonía (creciente)

$$a_{n+1} > a_n \;\; => \;\; x^{n+1} > x^n \;\; => \;\; x^n x > x^n \;\; => \;\; x > 1$$

Por lo cual se concluye que la función será monótona creciente para $x > 1$ y caso contrario

$$a_{n+1} < a_n \;\; => \;\; x^{n+1} < x^n \;\; => \;\; x^n x < x^n \;\; => \;\; x < 1$$

Es monótona decreciente para $x < 1$.

Para $x = 1$ es monótona ya que es constante e igual 1.

Pregunta 7

Observamos los primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = 0 \,; a_2 = 3 \,; \; a_3 = \frac{1}{2} \; ; \; a_4 = \frac{5}{3} \; ; \; a_5 = \frac{2}{3} \; ; \; a_6 = \frac{7}{5}; \ldots$$

Podemos concluir que para números pares es mayor que 1 y para números impares es menor que 1. Veamos

$$a_{2n} = \frac{2n + (-1)^{2n}}{2n + (-1)^{2n+1}} = \frac{2n + ((-1)^2)^n}{2n + (-1)((-1)^2)^n} = \frac{2n+1}{2n-1}$$
$$= 1 + \frac{2}{2n-1} \quad => \quad a_{2n} > 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{\left((2n+1) + (-1)^{2n+1}\right)}{2n+1+(-1)^{2n+2}} = \frac{2n}{2n+2} = 1 - \frac{2}{2n+2}$$
$$=> \quad a_{2n+1} < 1$$

Entonces comprobamos lo que se sospechaba, por lo tanto no es monótona.

Veamos si es acotada. Para los pares.

$$a_{2n} = 1 + \frac{2}{2n-1} \ ; \text{ como } n > 1 \ => \ 2n-1 > 1 \text{ y luego } a_{2n} \leq 1 + 2 => \ a_{2n} \leq 3$$

Para los impares.

$$a_{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+2} < 1$$

Luego concluimos que la sucesion es acotada a 3.

Pregunta 8

Observamos los primeros términos y podemos suponer que es decreciente veamos,

$$a_{n+1} < a_n \ => \ \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!} \ => \ \frac{2^n 2}{(n+1)n!} < \frac{2^n}{n!}$$

$$=> \ \frac{2}{n+1} < 1 \ => \ 2 < n+1$$

$$n > 1$$

Lo cual es cierto por lo tanto la sucesión es decreciente. Es acotada por 0 inferiormente y la cota superior será 2.

Pregunta 9

Debemos tener en cuenta $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ es continua para $(a_n \neq 0)$

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{l}\right)$$

$$2l^2 = l^2 + 3 \quad => \quad l^2 = 3 \quad => \quad l = \sqrt{3}$$

Pregunta 10

Pregunta 11

Para el primer término. $a_2 = \frac{3}{2}$; $b_2 = \sqrt{2}$, se cumple $2 > \frac{3}{2} > \sqrt{2} > 1$

Ahora se debe demostrar para $n+1$, es decir $a_{n+1} > a_{n+2} > b_{n+2} > b_{n+1}$

Lo realizamos por partes.

$$(1) \quad a_{n+2} > b_{n+2} => \ (a_{n+2} - b_{n+2}) > 0 \ =>$$

$$\left(\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} - \sqrt{(a_{n+1})(b_{n+1})}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - 2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} + b_{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)^2 > 0$$

Verificada la primera desigualdad.

$$(2) \ \ a_{n+1} > a_{n+2} \ => \ \ a_{n+1} - a_{n+2} > 0$$

$$a_{n+1} - \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - b_{n+1}) > 0$$

Verificada segunda desigualdad, por último

$$(\mathbf{3}) \ b_{n+2} > b_{n+1} \ => \ (b_{n+2} - b_{n+1}) > 0$$

$$\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} - b_{n+1} = \sqrt{b_{n+1}}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right) > 0$$

Verificada la tercera desigualdad luego, por inducción

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

Es verdadero. Concluimos que la funciones son monótonas y ambas convergen

Para el límite, suponemos que, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$; $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

Luego

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$2\alpha = \alpha + \beta \quad => \quad \alpha = \beta$$

Por otro lado

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\beta^2 = \alpha\beta \;\; => \;\; \beta(\beta-\alpha) = 0 \;\; => \begin{cases}\beta = 0\\ \beta = \alpha\end{cases}$$

Pregunta 12

a.- Aplicando límite DIVERGE.

b.- Reescribir el logaritmo en base del natural, tomar limites CONVERGE a 0 .

c.- Tomar límite DIVERGE.

d.- Recordad límites en mate2. CONVERGE a e^2

Pregunta 13

a.- Creciente. B.- Creciente

c.- Evaluar el termino de posición $(n+1)$ entre el termino n. Observar que es mayor que 1 cuando n es mayor que 1. CRECIENTE.

d.- Creciente ya que $a_{n+1} - a_n > 0$

e.- Decreciente.

Pregunta 14

Ambos límites son infinitos por lo cual divergen ambas. Pero al efectuar la suma de fracciones y tomar limite =7 CONVERGE.

Pregunta 15

Se debe probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un numero N$N > 0$ tal que $|a_n^2 - L^2| < 1; =>$ $|a_n - L||a_n + L| < \varepsilon$ para cada entero $n > N$. Ya que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ luego existe un numero N tal que para cada entero $n > N_1$ por lo tanto $|a_n - L| < 1$: $-1 < a_n - L < 1$; $2L - 1 < a_n + L < 2L + 1$, $|a_n + L| < 2L + 1$. Por lo tanto también existe numero N_2 tal que $|a_n + L| < \frac{\varepsilon}{2L+1}$ para cada entero $n > N_2$ por lo cual

$$|a_n^2 - L^2| = |a_n - L||a_n + L| < \frac{\varepsilon}{2L+1}(2L+1) = \varepsilon$$

Para cada entero $n > N = \max(N_1, N_2)$

Pregunta 16

Ya que $0 < k \leq 1$ luego $a_{n+1} < ka_n < a_n$. Por lo cual a_n es decreciente y acotado por debajo. CONVERGE.

Pregunta 17

a.- Serie Geométrica con $r = -4$. Diverge

b.- Criterio n-ésimo termino. Diverge.

c.- Serie geométrica $r = \frac{9}{8}$ Diverge.

d.- Serie telescópica, converge $S = \frac{3}{2}$

e.- Serie armónica, Diverge

f.- Serie armónica Diverge.

Pregunta 18

$$\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$$

Si aplicamos posición a posición queda $= -\ln(k+1)$

Aplicando límite. Diverge

Pregunta 19

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Aplicando límite. Se tiene que $S = -\ln(2)$

Pregunta 20

Determine las fracciones simples y obtenga el resultado

$$1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

Por lo cual $S = 1$

Pregunta 21

Demuestre las HIPOTESIS del teorema (Continua, Positiva, Decreciente)

a.- $I = \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)$ CONVERGE.

b.- $I = -\frac{3}{x+2}$ CONVERGE.

c.- $I = -\frac{1000}{\ln(x)}$ CONVERGE.

d.- $I = 4\sqrt{x+2}$ DIVERGE.

e.- $I = -\frac{6}{(4+3x)^{\frac{1}{6}}}$ CONVERGE.

f.- $I = -\frac{1}{6}e^{-3x^2}$ CONVERGE.

Pregunta 22

a.- Limite valor absoluto no existe, DIVERGE.

b.- Limite = 1 DIVERGE.

c.- Serie telescópica CONVERGE = 1

d.- Separar las series. Suma de series convergentes CONVERGE.

Pregunta 23

a.- Comparación de límite $b_n = \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

b.- Comparación de limite $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ CONVERGE.

c.- Criterio del cociente. DIVERGE

d.- Criterio del cociente CONVERGE.

e.- Criterio del cociente CONVERGE.

f.- Criterio del cociente. CONVERGE.

g.- Criterio del cociente CONVERGE.

h.- Criterio del cociente CONVERGE.

i.- Sucesión $a_n = \frac{n+1}{n^3+5n^2+6n}$ Comparación de límite con $b_n = \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

j.- Sucesión $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ Criterio de la integral CONVERGE.

k.- Criterio del n-esimo termino. Tomar neperiano para bajar la potencia, luego determinar el límite de la función $= e^{-1}$. Diferente de cero DIVERGE.

Pregunta 24

Ya que $\sum a$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto existe alguna N positiva tal que $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq N$. Se tiene que $a_n < 1 \;=>\; a_n^2 < a_n$ por lo cual $\sum a_n^2 < \sum a_n$. Entonces $\sum a_n^2$ converge.

Pregunta 25

a.- Converge. b.- Converge c.- Converge.

Pregunta 26

a.- Comparación de limites $b_n = \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

b.- Comparación de limite $b_n = \frac{1}{n}$ DIVERGE.

c.- Multiplicar por conjugado del numerador queda $\frac{\sqrt{n}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ lo cual es menor que $\sqrt{n}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$. A esta nueva función. Criterio de comparación de limite $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ CONVERGE. Por criterio de comparación termino a término CONVERGE.

Pregunta 27

a.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

b.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

c.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

d.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

e.- Serie alternante converge, pero la serie comparando con limite $b_n = \frac{1}{n^{0.1}}$ DIVERGE, por lo que CONVERGE CONDICIONALMENTE.

f.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Criterio comparación termino a termino con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

g.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

h.- DIVERGE.

i.- La serie es igual a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

j.- DIVERGE.

k.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

l.- DIVERGE.

m.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

n.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

Pregunta 28

Probemos que es convergente, cuando $n \to \infty$ observamos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad y \quad ademas \quad \lim_{n\to\infty} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Probamos con comparación al límite con $b_n = \frac{1}{2^n}$ Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = e$$

Luego tienen el mismo comportamiento, y como b_n es serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$ converge luego la serie problema CONVERGE.

Pregunta 29

Por comparación tenemos que $0 < |\sin(n)| < 1$, asi que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

La serie nueva es la serie p con $p = 2$ converge y por comparación la serie problema CONVERGE.

Pregunta 30.

a.- Veamos si cumple las condiciones para el criterio de la integral. Sea $f(x) = \frac{1}{x^3}$ es continua para $x > 0$, y positiva, veamos la primera derivada $f(x) = -\frac{3}{x^4}$ es siempre negativa por lo cual es siempre decreciente.

Tenemos que $S_4 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} = 1{,}177$, el error viene por

$$Err_4 = \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leq \int_4^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{n\to\infty}\int_4^n\frac{1}{x^4}dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty}$$
$$= \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

Por lo tanto $S = 1{,}17766 \pm 0{,}03125$

Para buscar el número de términos necesario para que $Err_n < 0{,}01$ entonces realizamos

$$Err_n \leq \int_n^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2n^2} < 0{,}01 \;\; => \;\; n \geq \sqrt{\frac{1}{0{,}02}} = 7{,}071$$
$$=> \;\; n \geq 8$$

b.- Veamos las condiciones para aplicar el criterio de la integral, observamos la primera derivada.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} \;;\; f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

Entonces la función es decreciente para $x > -\frac{1}{2}$ => $x > 0$, es continua y positiva luego aplicamos el criterio de la integral.

Tenemos que para los cuatro primero términos

$$S = \sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} = 0{,}8$$

Y el error viene

$$Err_4 = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \le \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$$

$$= -\ln(x+1) + \ln(x)_4^{\infty} = \ln(5) - \ln(4)$$
$$= 0{,}223$$

Por lo cual

$$S = 0{,}8 \pm 0{,}3$$

Si queremos saber el número de posiciones necesarias para que $Err_n < 0{,}01$, apliquemos la integral

$$Err_n \le \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)_n^{\infty}$$
$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Y se tiene

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0{,}01 \quad => \quad \frac{n+1}{n} < e^{0{,}01} \quad => 1 + \frac{1}{n} < e^{0{,}01}$$
$$=> \quad n > \frac{1}{e^{0{,}01}-1} \quad => n > 99{,}5$$

Entonces para $n \ge 100$, se cumple el error pedido.

Pregunta 31

a.- Observamos que $1 + 2^n > 2^n$ y por lo tanto $\frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$ así se tiene

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i}{1+2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Imponemos que $\frac{1}{2^n} < 0{,}01$ y despejamos n. Se tiene $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} = 6{,}64 \;\; => \quad n \ge 7$

Por lo cual

$$S \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{2^n+1} = 0{,}756 = 0{,}76$$

b.- Observamos que $\frac{n}{n+1} < 1$ y por lo tanto $\frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{1}{2^n}$ así que

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto si queremos que el error sea menor a 0,01 decimos que

$$\frac{1}{2^n} < 0{,}01 \quad => \quad n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0{,}01) \quad => \quad n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}$$
$$=> \quad n \ge 6{,}64 \;\; => \quad n \ge 7$$

Así tenemos que,

$$S \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{n}{(n+1)2^n} = 0{,}606 \quad = 0{,}61$$

Pregunta 32.

Evaluamos la serie de valor absoluto y tenemos

$$\left|\frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^2+n}\right| = \frac{|(-1)^n + \cos(3n)|}{n^2+n} < \frac{2}{n^2+n} < \frac{2}{n^2}$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \;\; ; \quad \text{serie } P = 2 \quad \textbf{CONVERGE}$$

Por comparación termino a término converge la serie problema, dado a que es la serie de valores absoluto se concluye que la serie

CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Pregunta 33

a.- Converge para toda (x)

b.- Converge para $(-1{,}1)$ en los extremos la serie diverge.

c.-Converge para $(-1{,}1)$ en los extremos la serie diverge.

d.- Converge para $[-1{,}1)$ en 1 la serie diverge.

e.- Converge para $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en los extremos la serie diverge.

f.- Converge para toda (x).

g.- Converge para $[1,3]$

h.- Converge para $(-4,-2)$

Pregunta 34

Converge para un intervalo

$$(3-a, 3+a)$$

Pregunta 35

a.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$ $\quad radio = 1$

b- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n}$ $\quad radio = 1$

c.- $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2}{3}x\right)^{n}$ $\quad radio = \frac{3}{2}$

d.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^{n}$ $\quad conjunto\ \left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$

e.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ $\quad radio = 1$

Pregunta 36

a.- $S = \frac{x}{1+x}$

b.- $S = \frac{e^{x}-(1+x)}{x^2}$

c.- $S = -\ln(1-2x)$

Pregunta 37

Derive la serie geométrica dos veces y multiplique por x lo cual da

$$S = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Pregunta 38

a.- $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{30}$ $\qquad$ b.- $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30}$

c.- $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$

d.- $x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} - \frac{x^4}{48} - \frac{19x^5}{1920}$

e.- $\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \frac{x^4}{8!}$ $\qquad$ f.- $1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + \frac{61x^5}{120}$

g.- $5x^2 - \frac{35x^4}{3!}$ $\qquad$ h.- $1 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{9}$

Pregunta 39

a.- $\sin(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$

b.- $\tan(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

c.- $3 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$

d.- $7 - 10(x+1) + 6(x+1)^2 - (x+1)^3$

Pregunta 40

a.- $1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24}$

b.- $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$

c.- $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{30}$

d.- $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}$

e.- $-x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{2x^6}{45}$

Pregunta 41

a.- Converge. $\qquad$ b.- Diverge

c.- Converge $\qquad$ d.- Converge

e.- Diverge $\qquad$ f.- Converge a $\frac{3}{2}$

g.- Diverge $\qquad$ h.- Converge a 12

i.- Diverge $\qquad$ j.- Converge

k.- Converge $\qquad$ l.- Converge a 4

m.- Converge $\qquad$ n.- Converge

o.- Converge absolutamente

p.- Converge condicionalmente.

Pregunta 42

a.- Conjunto de Convergencia $[-1,1]$

b.- Conjunto de convergencia $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

c.- Conjunto de convergencia (3,5)

d.- Conjunto para toda (x)

e.- Diverge

f.- Solo para $x=-1$

Pregunta 43

a.- 2 orden, E. Diferencial.

b.- 4 orden, E. Diferencial.

c.- 1 orden, E. Diferencial.

d.- 1 orden, E. Diferencial.

e.- 2 orden, E. Diferencial.

Pregunta 44

a.- SI b.- SI c.- NO d.- NO e.- SI f.- SI

Pregunta 45

a.- NO b.- SI c.- SI

Pregunta 46

a.- ± 1 b.- $1 \pm \sqrt{6}$

Pregunta 47

a.- $x^2-y^2=C$ *b.-* $x^2+2y^2=C^2$

c.- $r=C(1-cos(\theta))$ *d.-* $y^2=-2x+C$

e.- $y=Cx^2$ *g.-* $x^2-y^2=C$

Pregunta 48

Solución: $r=\frac{C}{1+cos(\theta)}$

Pregunta 49

$$Q=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

Pregunta 50

a.- $y=\frac{e^{3x}}{2}+Ce^x$ c.- $y=\frac{x^3e^{-4x}}{3}+Ce^{-4x}$

e.- $r=\sin(\theta)+C\cos(\theta)$

f.- $y=-t-2+ce^t$ g.- $x=y^3+c\,y^{-2}$

h.- $y=1+C(x^2+1)^{-1/2}$

i.- $y=\frac{x^3}{6}-\frac{2x^2}{5}+x+C\,x^{-3}$

Pregunta 51

a.- $y=xe^x-x$

c.- $y=1-x\cot(x)+\csc(x)$

e.- $y=\frac{x^{-1}}{2}-2x^{-3}$

f.- $y=\cos(x)\,(x^2-\pi^2)$

Pregunta 52

a.- $y^{-2}=Ce^{-2x}-\frac{e^{2x}}{2}$ *o* $y\equiv 0$

b.- $y=\frac{2}{Cx-x^3}$ *o* $y\equiv 0$

c.- $y=\frac{5x^2}{x^5+C}$ *o* $y\equiv 0$

e.- $y^{-2}=2x^2\ln|x|+Cx^2$ *o* $y\equiv 0$

g.- $y=\frac{x^2}{C-x}$ *o* $y\equiv 0$

Pregunta 53

a.- $y=(x^3-3x+C)^{1/3}$ b.- $y^4=4\ln|x|+C$

c.- $y=Ce^{x^3}$ d.- $y=Ce^{2x-\cos(x)}$

e.- $y=\tan(x^3+C)$ f.- $y=\frac{Ce^x}{1+Ce^x}$

g.- $4v^2=1+Cx^{-8/3}$ h.- $y=\frac{1}{C-e^{\cos(x)}}$

Pregunta 54

a.- $y = \sqrt{4 - \frac{x^3}{3}}$ b.- $y = \ln\sqrt{4x^4 - 3}$

c.- $y = -3e^{-1-\cos(x)}$ d.- $y^2 + y = x^3 + 2x^2 + 2x$

e.- $y = \sin^2(x) + 2\sin(x)$ f.- $y = 1 + 2e^{-\frac{x^4}{4}}$

g.- $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - ln(\cos(x))\right)$

h.- $y = \arctan(x^2 + 1)$ i.- $y = 4e^{\frac{x^3}{3}} - 1$

j.- $y = \left(1 - \ln\left(\sqrt{1 + x}\right)\right)^2$

Pregunta 55

a.- $x^3 + 3xy^2 = C$

b.- $y = \frac{-x}{\ln|x| + C}$ ó $x \equiv 0$ ó $y \equiv 0$

c.- $y = \frac{x}{\ln|x| + c}$ o $y \equiv C$

d.-$\ln(y) - \frac{y^2}{2x^2} = 3\ln(x) + C$

e.- $\sqrt{1 + y^2/x^2} = ln|x| + C$

g.- $(x^2 - 4y^2)^3 x^2 = C$ **h.-** $y = xe^{Cx}$

Pregunta 56.

a.- $3(x+1)^2 - 2(x+1)(y+2) - (y+2)^2 = K$

b.- $2\arctan\left(\frac{y-3}{x+2}\right) - \ln((x+2)^2 + (y-3)^2) = K$

c.- $\frac{1}{25}((5x+6)^2 + (5x+6)(5y+8) - (5y+8)^2) = K$

d.- $\ln\left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 5\left(x - \frac{3}{2}\right)(y+3) + (y+3)^2\right) + \frac{3}{\sqrt{17}}\ln\left(\frac{2(y+3) + (5-\sqrt{17})\left(x - \frac{3}{2}\right)}{2(y+3) + (5+\sqrt{17})\left(x - \frac{3}{2}\right)}\right) = K$

Pregunta 57

i.- $y^2 = c_1 x + c_2$ ii.- $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$

iii.- $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-(kx)}$

iv.- $y = -\frac{1}{2}x^2 - c_1 x - c_1^2\log(x - c_1) + c_2$

v.- $2\sqrt{c_1 y - 1} = \pm c_1 x + c_2$ vi.- $y = c_2 e^{c_1 x}$

vii.- $y = x^2 + c_1\log(x) + c_2$

Pregunta 58

i.- $y = 1$ ó $3y + x^3 = 3$ ii.- $2y - 3 = 8ye^{\frac{3x}{2}}$

iii.- $y = -\log(2e^{-x} - 1)$

Pregunta 59

i.- $2x^2 + c_1\ln(x) + c_2$

ii.- $\frac{x^5}{5} + \frac{2c_1x^3}{3} + c_1^2 x + c_2$ ó $y \equiv c$

iii.- $\ln(\sec(x + c_1)) + c_2$

iv.- $\pm\frac{1}{3}(2x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2$

v.- $x = c_1 + c_2 y + \frac{y^3}{6}$ ó $y \equiv c$

vi.- $y = c_1\tan\left(c_2 - \frac{c_1 x}{2}\right)$; $y = \frac{c_1(c_2 e^{c_1 x} - 1)}{2e^{c_1 x} + 1}$

$y = 2(x + c)^{-1}$

vii.- $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + c_1 + c_2 x^3$

viii.- $y - \ln(e^y + c_1) = c_1 x + c_2$; $y = -\ln(c - x)$

$y \equiv C$

ix.- $x = c_2 - c_1 y + (1 + c_1^2)\ln(y + c_1)$ ó $y \equiv C$

Pregunta 60

a.- $e^x + ye^{-y} = C$ b.- $y = (7\ln|x| + c)^{-1/7}$

c.- $y = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \left(\frac{x}{4}\right)\sin(2x) + Cx$

d.- $y = 2x + 3 - \frac{(x+c)^2}{4}$ e.- $y = \frac{2}{1 \pm ce^{2x}}$ ó $y \equiv 0$

f.- $y^2 + 2xy - x^2 = C$ g.- $y = \sqrt{\frac{19x^4 - 1}{2}}$

PUNTOS FINALES

1.- Se debe tener dominio y muy buen manejo de las series y sucesión como también se debe aprender "de memoria" el desarrollo en serie de las funciones básicas.

2.- DEBE COMPROBAR las hipótesis de los teoremas y criterios para poder aplicar sus resultados, hay muchos profesores que considera malo un ejercicio si no se ha demostrado las hipótesis, evite que le quiten puntos.

3.- Para poder comparar una serie con otra por lo general se construye b_n a partir de la potencia más alta en numerador o denominador.

4.- Aprenda de memoria el algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Como también las ecuaciones de Bernoulli.

2.- Debe recordar cómo integrar, ya estudiado en matemáticas 2, así como la integración por partes, y las integrales trigonométricas.

3.- En las ecuaciones homogéneas, verifique que es una ecuación homogénea al resolver $f(kx, ky) = f(x, y)$. De manera que proceda a realizar los cambios de variable.

4.- NO SIEMPRE EL ORDEN DEL DIFERENCIAL es el apropiado para resolver la ecuación diferencial, debe estar atento a ver si con cambiar el orden se pueda resolver más fácil el ejercicio (nota personal, he visto parciales con esta concha de mango)

SIRVASE DE AYUDA PARA PRACTICAR "SERIES Y SUCESIONES Y ECUACIONES DIFERENCIALES" PRIMERA PARTE MATEMATICAS 4

PARA MAYOR APOYO BUSQUE LA ***GUIA DE TEORIA*** EN LA PAGINA WEB

sites.google.com/site/usbmike06

CUALQUIER ERROR TIPOGRAFICO O DE RESULTADOS FAVOR AVISAR A magt_123@hotmail.com PARA SU CORRECCION. MENCIONE NUMERO DE PAG, NUMERO DE EJERCICIO, QUE DICE Y QUE DEBERIA DECIR.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.

R. Kent Nagle, Edward B. Saff, A. David Snider "FUNDAMENTALS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS" Fourth Edition, Pearson Addison Wesley, 2004

PURCELL, Edwin J. CALCULO Octava edición, editorial Person Educación, México 2001

Actualizada: **AGOSTO 2011** Guía Elaborada por: **Miguel Guzmán**